Лекция 11

ПРИГОТОВЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ СХОДИМОСТИ

При применении того или иного приближенного метода для решения интересующей нас задачи мы вправе ожидать, что полученное решение в каком-то смысле близко к точному. Мы хотели бы также надеяться, что этот метод позволяет найти решение с любой интересующей нас точностью. Иными словами, мы хотим, чтобы используемый для вычислений приближенный метод был сходящимся. В методах Ритца и Галеркина параметром, управляющим сходимостью, является размерность n конечномерного пространства V^n, в котором ищется приближенное решение. Как мы уже отмечали, в методе конечных элементов за размерность S^h отвечает параметр h, характеризующий размер конечных элементов. Поэтому сходимость следует ожидать при $h \to 0$.

Определение 1. Говорят, что приближенный метод сходится, если последовательность приближенных решений u^h при $h \to 0$ сходится в некоторой норме к точному решению, т.е.

$$\lim_{h \to 0} \| u - u^h \| = 0.$$

Определение 2. Говорят, что метод сходится со скоростью $O(h^k)$, $k > 0$, если при $h \to 0$

$$\| u - u^h \| = O(h^k).$$

В последующих лекциях будет доказана сходимость некоторых из построенных нами методов конечных элементов и даны оценки их скорости сходимости в некоторых нормах. Чтобы все это сделать, нам потребуются некоторые приготовления, которым и посвящена настоящая лекция.

1. Постановка задачи

Напомним постановки вариационной задачи и задачи минимизации функционала, лежащие в основе МКЭ. Сделаем это в абстрактном виде без конкретизации билинейной и линейной форм. Пусть H — гильбертово пространство, $l(v)$ — линейная форма, заданная на H, т.е.

$$l(v):\ H \to \mathbb{R}, \qquad l(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 l(v_1) + c_2 l(v_2),$$

где c_1 и c_2 — постоянные, а $a(u,v)$ — билинейная симметричная, положительная форма, т.е.

$$\begin{aligned} &a(u,v): \quad H \times H \to \mathbb{R}, \quad a(c_1 u_1 + c_2 u_2, v) = c_1 a(u_1, v) + c_2 a(u_2, v), \\ &a(u,v) = a(v,u), \quad a(v,v) > 0 \quad \forall v \neq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть, кроме того, задан квадратичный функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - l(v): \quad H \to \mathbb{R}. \tag{2}$$

Задача 1. Найти

$$u = \underset{v \in H}{\arg} \inf J(v). \tag{3}$$

Задача 2. Найти

$$u \in H: \quad a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H. \tag{4}$$

Напомним, что в силу теоремы 2.1 задачи 1 и 2 эквивалентны.

Поставим задачу об отыскании приближенного решения. Пусть H^h — конечномерное подпространство пространства , т.е.

$$H^h \subset H, \qquad \dim H^h = n < \infty. \tag{5}$$

Тогда *ритцевским решением* задачи 1 будет функция

$$u^h = \underset{v^h \in H^h}{\arg} \inf J(v^h), \tag{6}$$

а *галеркинским решением* задачи 2 — функция

$$u^h \in H^h: \qquad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in H^h. \tag{7}$$

Решения задач (6) и (7) совпадают. Как следует из результатов лекции 3, существование и единственность этих решений вытекает из предположения (1) о положительности квадратичной формы $a(v, v)$.

Замечание 1. Билинейная форма $a(u, v)$ обладает всеми свойствами скалярного произведения.

Определение 3. При выполнении условий (1) билинейную форму $a(u, v)$ будем называть *энергетическим скалярным произведением.*

Определение 4. При выполнении условий (1) квадратный корень из квадратичной формы $a(v, v)$ будем называть *энергетической нормой* и обозначать $\| v \|_a = \sqrt{a(v, v)}$.

Замечание 2. При некоторых интерпретациях задачи 2 квадратичная форма $a(v, v)$ может трактоваться как удвоенная потенциальная энергия, с чем и связаны названия в определениях 3 и 4.

2. Свойства приближенного решения

Теорема 1. *Приближенное решение u^h есть ортогональная в смысле энергетического скалярного произведения $a(\ ,\ )$ проекция точного решения u на H^h, т.е.*

$$a(u - u^h, v^h) = 0 \quad \forall\, v^h \in H^h. \tag{8}$$

Доказательство. Полагая в (4) $v = v^h \in H^h$ и вычитая из полученного соотношения (7), получим (8). $\square$

Теорема 2 (основная)**.** *Приближенное решение u^h есть наилучшее в смысле энергетической нормы $\| \cdot \|_a$ приближение точного решения u в H^h, т.е.*

$$\| u - u^h \|_a = \inf_{v^h \in H^h} \| u - v^h \|_a . \tag{9}$$

Доказательство. В силу (8) векторы $u - u^h$ и u^h ортогональны и, следовательно,

$$\| u \|_a^2 = \| u - u^h \|_a^2 + \| u^h \|_a^2 .$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\| u - u^h \|_a \leqslant \| u \|_a .$$

Принимая теперь во внимание, что ортогональная проекция $v^h \in H^h$ на H^h есть та же v^h, находим, что

$$\| u - u^h \|_a = \| (u - v^h) - (u - v^h)^h \|_a \leqslant \| u - v^h \|_a,$$

откуда и следует (9). □

Следствие 1. В силу теоремы 2 задача оценки разности между точным и приближенным решениями в энергетической норме свелась к задаче оценки аппроксимации функции $u \in H$ функциями $v^h \in H^h$.

Свойство симметрии билинейной формы $a(u,v)$ полезно, но не необходимо для справедливости соотношений типа (9). В симметричном случае билинейная форма, порождающая положительно определенную квадратичную форму, является скалярным произведением, а потому индуцирует норму, и для нее справедливо *неравенство Шварца*:

$$\|v\|_a^2 = a(v,v), \quad |a(u,v)| \leqslant \|u\|_a \, \|v\|_a.$$

В *несимметричном* случае эти свойства билинейной формы заменяются двумя условиями: условием

$$0 < m\|v\|_H^2 \leqslant a(v,v), \tag{10}$$

называемым *условием коэрцитивности или H-эллиптичности*, и условием

$$|a(u,v)| \leqslant M \, \|u\|_H \, \|v\|_H, \tag{11}$$

называемым *условием непрерывности билинейной формы*. Имеет место

Теорема 3 (Лемма Сеа). *Если билинейная форма $a(u,v)$ коэрцитивна и непрерывна, а u и u^h суть решения задач* (4) *и* (7), *соответственно, то*

$$\|u - u^h\|_H \leqslant \frac{M}{m} \|u - v^h\|_H \quad \forall\, v^h \in H^h.$$

Доказательство. Соотношение (8) имеет место и в несимметричном случае, поэтому

$$a(u-u^h, u-u^h) = a(u-u^h, u-v^h) + a(u-u^h, v^h-u^h) = a(u-u^h, u-v^h).$$

Используя теперь условия коэрцитивности и непрерывности, получаем оценку

$$m\,\|u-u^h\|_H^2 \leqslant M\,\|u-u^h\|_H\,\|u-v^h\|_H,$$

из которой и следует утверждение теоремы. □

3. Модельная задача

Напомним постановку дифференциальной задачи, на примере которой в предыдущих лекциях мы изучали различные варианты МКЭ.

Требуется найти функцию $u(x)$, которая удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям:

$$Lu := -(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \qquad x \in I = (0,1), \tag{12}$$

$$u(0) = 0, \qquad p(1)u'(1) + \varkappa u(1) = g. \tag{13}$$

Вариационная формулировка этой задачи имеет вид (4), где

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 (pu'v' + quv)dx + \varkappa u(1)v(1), \\ l(v) &= \int_0^1 fv dx + gv(1), \end{aligned} \tag{14}$$

а

$$H = \tilde{H}^1(I) = \{v(x) \in H^1(I) \mid \quad v(0) = 0\}. \tag{15}$$

Будем, как и раньше, предполагать, что

$$p(x) \geqslant c_0 > 0, \quad q(x) \geqslant 0, \quad \varkappa \geqslant 0 \tag{16}$$

и, кроме того,

$$p(x) \leqslant c_1, \quad q(x) \leqslant c_2. \tag{17}$$

Приближенным решением задачи (12),(13) будет функция $u^h(x)$ из (6) или (7), где $a(u,v)$ и $l(v)$ определяются (14), а $H^h = \tilde{S}^h \subset \tilde{H}^1(I)$ — некоторое конечноэлементное пространство. Существование и единственность указанного приближенного решения задачи (12),(13) гарантируется теоремой из лекции 3 при условии, что $a(v,v)$ из (14) положительна. Ее неотрицательность очевидным образом следует из (16). Эти же условия обеспечивают и положительность $a(v,v)$ на $\tilde{H}^1(I)$, но, чтобы увидеть это, требуются некоторые рассуждения.

4. Вспомогательные оценки

Здесь мы установим ряд неравенств между нормами функций из $H^1(I)$ и $H^2(I)$. Эти неравенства будут использованы при исследовании вопроса о положительности квадратичной формы $a(v,v)$ и при исследовании аппроксимационных свойств пространства S^h. Доказываемая ниже лемма 1, помимо прочего, устанавливает справедливость уже использованного нами ранее утверждения о непрерывности функций из $H^1(I)$.

Лемма 1. *Всякая функция из $H^1(I)$ непрерывна на $\bar{I}$, т.е. пространство $H^1(I)$ вкладывается в пространство $C(\bar{I})$ ($H^1(I) \subset C(\bar{I})$). При этом имеет место оценка*

$$\| v \|_{C(\bar{I})} := \max_{x \in \bar{I}} |v(x)| \leqslant \sqrt{2} \, \| v \|_1 \, . \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $v(x) \in C^1(\bar{I})$, а x и ξ — произвольные точки $\bar{I}$. Тогда

$$|v(\xi) - v(x)| = \left| \int_x^\xi v'(\eta) d\eta \right|. \tag{19}$$

Оценивая интеграл в правой части при помощи неравенства *Коши - Буняковского**), а затем несколько загрубляя полученную оценку, будем иметь

$$|v(\xi) - v(x)| \leqslant \sqrt{|\xi - x|} \left| \int_x^\xi v'^2(\eta) d\eta \right|^{1/2} \leqslant \sqrt{|\xi - x|} \, \| v' \|_0 \, .$$

*) Напомним, что неравенством Коши-Буняковского применительно к данному контексту называется неравенство $|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$.

Отсюда при $\xi = x + \Delta x$ находим, что

$$|v(x+\Delta x) - v(x)| \leqslant \sqrt{|\Delta x|} \parallel v' \parallel_0 \leqslant \sqrt{|\Delta x|} \parallel v \parallel_1 . \tag{20}$$

Заметим теперь, что функции из $C^1(\bar{I})$ принадлежат $H^1(I)$ и образуют там всюду плотное множество (т.е. замыкание $C^1(\bar{I})$ по норме $H^1(I)$ совпадает с $H^1(I)$). Поэтому неравенство (20) справедливо и для $v(x) \in H^1(I)$. Далее, так как второй сомножитель в правой части (20) ограничен, то при стремлении к нулю приращения аргумента Δx стремится к нулю и стоящее слева приращение функции, что и доказывает непрерывность $v(x) \in H^1(I)$.

Установим оценку (18). Из (19) следует, что

$$|v(x)| \leqslant |v(\xi)| + \left| \int_x^\xi v'(\eta) d\eta \right| \leqslant |v(\xi)| + \int_0^1 |v'(\eta)| d\eta, \tag{21}$$

а после интегрирования обеих частей этого неравенства по ξ будем иметь

$$|v(x)| \leqslant \int_0^1 |v(\xi)| d\xi + \int_0^1 |v'(\xi)| d\xi.$$

Оценивая теперь каждый интеграл правой части при помощи неравенства Коши-Буняковского, а затем применяя *неравенство Коши*,[*)] получим (18). □

Замечание 3. Из неравенства (20) следует не только непрерывность функций из $H^1(I)$, но и их *гёльдеровость* с показателем 1/2.

В следующих двух леммах для функций, обращающихся в нуль в одной или двух точках отрезка $\bar{I}$, устанавливаются оценки нормы самой функции и ее первой производной через норму производной следующего порядка.

Лемма 2. *Для всякой функции* $v(x) \in \tilde{H}^1(I)$

$$\parallel v \parallel_0 \leqslant \parallel v' \parallel_0 . \tag{22}$$

[*)] Напомним, что неравенством Коши называется неравенство типа $|\sum_{k=1}^m a_k b_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$.

Доказательство. Положим в неравенстве (21) $\xi = 0$, затем возведем обе части в квадрат и результат проинтегрируем по $x \in I$. Принимая теперь во внимание, что для функций из $\tilde{H}^1(I)$ $v(0) = 0$, приходим к (22). $\square$

Замечание 4. Поскольку $H_0^1(I) \subset \tilde{H}^1(I)$, то оценка (22) имеет место и для $v \in H_0^1(I)$.

Лемма 3. *Для всякой функции* $w(x) \in H^2(I) \bigcap H_0^1(I)$

$$\| w' \|_0 \leqslant \| w'' \|_0 . \tag{23}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\int_0^1 w'(\xi) d\xi = 0.$$

Поэтому

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dt} - \int_0^1 w'(\xi) d\xi = \int_0^1 \left[\frac{dw}{dt} - \frac{dw}{d\xi} \right] d\xi = \int_0^1 d\xi \int_\xi^t \frac{d^2 w}{d\eta^2} d\eta.$$

Отсюда находим, что

$$\| \frac{dw}{dt} \|_0^2 = \int_0^1 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dt = \int_0^1 dt \left[\int_0^1 d\xi \int_\xi^t \frac{d^2 w}{d\eta^2} d\eta \right]^2 .$$

Заменяя подынтегральную функцию в самом внутреннем интеграле правой части на ее модуль и расширяя пределы интегрирования, получим

$$\| w' \|_0^2 \leqslant \left[\int_0^1 |w''| dt \right]^2 .$$

Применение неравенства Коши-Буняковского к правой части приводит к неравенству (23). $\square$

Определение 5. Величина $|v|_m = \|v^{(m)}\|_0$ называется *полунормой* пространства $H^m(I)$.

Полунорма содержит лишь старшее слагаемое из тех, которые образуют норму. Ее отличие от нормы состоит в том, что она может обращаться в нуль не только на нулевом элементе. Так, например, $|v|_1 = 0$, если $v = \text{const}$, а $|v|_m = 0$, $m \in \mathbb{N}$, при $v \in P_{m-1}(I)$.

Лемма 4. *В пространстве* $\mathcal{H}^l$, $l = 1, 2$, *где*

$$\mathcal{H}^1 = \tilde{H}^1(I), \quad \mathcal{H}^2 = H^2(I) \bigcap H_0^1(I),$$

норма $\| \cdot \|_l$ *и полунорма* $| \cdot |_l$ *эквивалентны, причем*

$$|v|_l \leqslant \| v \|_l \leqslant \sqrt{1 + l} |v|_l.$$

Доказательство. Докажем, например, неравенства для $l = 1$. Возводя левую и правую части (22) в квадрат и прибавляя к обеим частям полученного неравенства по $|v|_1^2$, получим правое неравенство. Левое неравенство следует из определения нормы и полунормы. □

5. Оценка квадратичной формы

Установленные в предыдущем пункте неравенства между различными нормами функций из $H^1(I)$ позволяют получить оценки квадратичной формы $a(v, v)$ и доказать ее положительность.

Лемма 5. *При выполнении условий* (16), (17) *квадратичная форма* $a(v, v)$, *отвечающая билинейной форме* (14), *на функциях из* $\tilde{H}^1(I)$ *эквивалентна* $\| v \|_1^2$, *т.е.*

$$c_3 \| v \|_1^2 \leqslant a(v, v) \leqslant c_4 \| v \|_1^2, \quad v \in \tilde{H}^1(I),$$

где $c_3 = c_0/2, \quad c_4 = (c_1 + c_2 + 2\varkappa)$.

Доказательство. В силу (16)

$$a(v, v) = \int_0^1 (pv'^2 + qv^2) dx + \varkappa v^2(1) \geqslant c_0 \int_0^1 v'^2 dx = c_0 |v|_1^2.$$

Отсюда с учетом леммы 4 имеем требуемую оценку квадратичной формы снизу. В силу (17) и (18)

$$a(v, v) \leqslant c_1 \int_0^1 v'^2 dx + c_2 \int_0^1 v^2 dx + 2\varkappa \|v\|_1^2 \leqslant (c_1 + c_2 + 2\varkappa) \|v\|_1^2 = c_4 \|v\|_1^2.$$

□

Замечание 5. Из леммы 5, в частности, следует, что квадратичная форма $a(v,v)$ положительно определена и, следовательно, билинейную форму (14) можно рассматривать как *энергетическое скалярное произведение*, а $\sqrt{a(v,v)}$ — как *энергетическую норму*.

Множество функций $v(x)$, заданных на I, имеющих ограниченную энергетическую норму и обращающихся в нуль при $x=0$ называют *энергетическим*[*)] *пространством*. Ясно, что определенное таким образом энергетическое пространство совпадает с ранее введенным (см. (15)) пространством $\tilde{H}^1(I)$.

Замечание 6. Из леммы 5 следует положительность квадратичной формы (2.10) при выполнении условий (1.3) и на функциях из $H_0^1(I)$.

Следствие теоремы 2 и леммы 5. Для разности между приближенным и точным решениями задачи (12),(13) справедлива оценка

$$\| u - u^h \|_1 \leqslant \sqrt{c_4/c_3} \, \| u - v^h \|_1 \quad \forall v^h \in \tilde{S}^h. \tag{24}$$

Из оценки (24) следует, что точность приближенного решения u^h задачи (12), (13) в смысле $\| \cdot \|_1$ определяется аппроксимационными свойствами пространства $\tilde{S}^h$ при приближении точного решения каким бы то ни было способом в этой же норме.

6. Упражнения

1. Будет ли верно неравенство типа (23) для $w \in H^2(I) \bigcap \tilde{H}^1(I)$?

2. Выяснить, для каких $\varkappa < 0$ верно утверждение леммы 5 (с другими постоянными).

3. Выяснить, для каких $q(x)$, принимающих и отрицательные значения, верно утверждение леммы 5.

4. Выяснить, при каких ограничениях на коэффициент $r(x)$ билинейная форма (2.17), (1.3), заданная на $H_0^1(I) \times H_0^1(I)$, будет коэрцитивной (10) и непрерывной (11).

---

*) Энергетическим пространством, связанным со смешанной задачей (12), (13). Для другой задачи, например, для задачи (12), (1.2) энергетическое пространство, равно как и энергетическая норма, будет иным.